高维概率

High-Dimensional Probability

二、霍弗丁不等式

@滕佳烨

- **考虑上一节课留下来的情况**

对称伯努利分布

$$P(X_i = 1) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$$

其和满足

$$P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \geq t\right) \leq \exp(-\frac{t^2}{2})$$

- $P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \geq t\right) \leq \exp(-\frac{t^2}{2})$

  证明：第一步，将概率和MGF扯上关系

- $P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \geq t\right) \leq \exp(-\frac{t^2}{2})$

  证明：第二步，给出MGF的bound

- $P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \geq t\right) \leq \exp(-\frac{t^2}{2})$

  证明：第三步，合并到一起，得到界

- $P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \geq t\right) \leq \exp(-\frac{t^2}{2})$

一些拓展

- 加入系数a: $P\left(\sum_{i=1}^{N} \mathrm{a}_i X_i \geq t\right) \leq \exp(-\frac{t^2}{2\|a\|_2^2})$
- 双侧概率: $P\left(\left|\sum_{i=1}^{N} \mathrm{a}_i X_i\right| \geq t\right) \leq 2\exp(-\frac{t^2}{2\|a\|_2^2})$

- $P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \geq t\right) \leq \exp(-\frac{t^2}{2})$

一些拓展

- 若X不再是对称伯努利分布，而是一个有界随机变量 $X_i \in [m_i, M_i]$

$$P\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i - EX_i) \geq t\right) \leq \exp(-\frac{2t^2}{\sum(M_i - m_i)^2})$$

- 进一步的讨论

霍弗丁不等式给出了指数级别小的尾巴，一般已经非常好用了。

下一个问题就是，**什么样的随机变量能够满足霍弗丁不等式呢？**

有界随机变量　√

无界随机变量　？

- 霍弗丁不等式的形式，有什么特殊的？

考虑一个高斯分布$X \sim \mathcal{N}(0,1)$，其仍然满足霍弗丁不等式的**形式**！

$$P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \geq t\right) \leq \exp(-ct^2)$$

注意到高斯分布是无界的！

- 霍弗丁不等式的形式，有什么特殊的？

考虑一个高斯分布$X \sim \mathcal{N}(0,1)$，其仍然满足霍弗丁不等式的**形式**！

既然霍弗丁不等式关注一个分布尾巴的性质
那么尾巴如果比高斯分布还小，**是不是仍然满足霍弗丁不等式的形式呢！？**

这就是接下来讲的——次高斯分布(sub-gaussian)

- 次高斯分布(sub-gaussian distribution)

Motivation: 什么样的分布能够满足霍弗丁不等式呢？
我们之前了解过：对称伯努利、有界随机变量、正态随机变量

有没有更广义的表达？

——次高斯分布

- 次高斯分布(sub-gaussian distribution)
  - **次高斯分布性质(判定方法)：注意$X \in R^1$**

1. 概率角度 $\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq 2\exp(-t^2/K_1^2)$
2. 模长角度 $\|X\|_{L^p} = (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} \leq K_2\sqrt{p}$ for $p \geq 1$
3. 二阶矩母* $\mathbb{E}(\lambda^2 X^2) \leq \exp K_3^2\lambda^2$ for $|\lambda| < 1/K_3$
4. 二阶矩母* $\mathbb{E}\exp(X^2/K_4^2) \leq 2$
5. 矩母函数 $\mathbb{E}\exp(\lambda X) \leq \exp(K_5^2\lambda^2)$ (if $\mathbb{E}X = 0$，为什么？)

- 次高斯分布(sub-gaussian distribution)

  - **次高斯模**

$$\|X\|_{\psi_2} = \inf\{t > 0\colon \mathbb{E}\exp(X^2/t^2) \le 2\}$$

  - **次高斯分布性质（改写）**

1. 概率角度 $\mathbb{P}(|X| \ge t) \le 2\exp(-ct^2/\|X\|_{\psi_2}^2)$
2. 模长角度 $\|X\|_{L^p} = (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} \le c\|X\|_{\psi_2}\sqrt{p}$ for $p \ge 1$
3. 二阶矩母* $\mathbb{E}\exp(X^2/\|X\|_{\psi_2}^2) \le 2$
4. 矩母函数 $\mathbb{E}\exp(\lambda X) \le \exp(c\lambda^2\|X\|_{\psi_2}^2)$ (if $\mathbb{E}X = 0$，为什么？)

- 次高斯分布(sub-gaussian distribution)
  - **次高斯分布例子**

高斯分布 $\|X\|_{\psi_2} \le C\sigma$

伯努利分布 $\|X\|_{\psi_2} = \frac{1}{\sqrt{\ln 2}}$

有界函数 $\|X\|_{\psi_2} = C\|X\|_\infty, C = \frac{1}{\sqrt{\ln 2}}$

- 次高斯分布(sub-gaussian distribution)
  - **次高斯分布真的范围够广吗？**

常见的泊松分布、指数分布都不属于次高斯分布。

怎么办？能不能稍微放松一下这个不等式，然后得到更广的范围呢？

——下一节的**切尔诺夫不等式！**

谢谢！

@滕佳烨