高维概率

High-Dimensional Probability

三、伯恩斯坦不等式

@滕佳烨

- **上一节课说了啥**

霍弗丁不等式

$$P\left(|\sum_{i=1}^{N} \mathrm{a}_i X_i| \geq t\right) \leq 2\exp(-\frac{t^2}{2\|a\|_2^2})$$

次高斯分布

$$\|X\|_{\psi_2} = \inf\{t > 0:\ \mathbb{E}\exp(X^2/t^2) \leq 2\}$$

次高斯分布*包括*什么？有界随机变量，正态随机变量
次高斯分布*不包括*什么？泊松分布，指数分布

- **补充一点知识**

两种广义霍弗丁不等式（1）

$$P\left(|\sum_{i=1}^{N} X_i| \geq t \right) \leq 2\exp(-\frac{ct^2}{\sum \|X_i\|_{\psi_2}^2})$$

这代表了什么？--次高斯分布的和还是次高斯分布；而且次高斯模的相加方式和方差很类似！

$$\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \sigma^2(X_i)$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{N} X_i\right\|_{\psi_2}^2 \leq C\sum_{i=1}^{N} \|X_i\|_{\psi_2}^2$$

- **补充一点知识**

两种广义霍弗丁不等式（2）

$$P\left(|\sum_{i=1}^{N}\mathrm{a}_i X_i| \geq t\right) \leq 2\exp(-\frac{\mathrm{c}t^2}{K^2\|a\|_2^2})$$

$$\mathrm{K} = \max(\|X_i\|_{\psi_2})$$

- **补充一点知识**

一个不等式 Khintchine's inequality

Exercise 2.6.5 (Khintchine's inequality). ☕☕ Let $X_1, \dots, X_N$ be independent sub-gaussian random variables with zero means and unit variances, and let $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$. Prove that for every $p \in [2, \infty)$ we have

$$\Big(\sum_{i=1}^N a_i^2\Big)^{1/2} \le \Big\|\sum_{i=1}^N a_i X_i\Big\|_{L^p} \le CK\sqrt{p}\Big(\sum_{i=1}^N a_i^2\Big)^{1/2}$$

where $K = \max_i \|X_i\|_{\psi_2}$ and C is an absolute constant.

- **注意霍弗丁不等式的指数界**

霍弗丁不等式

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{N} \mathrm{a}_i X_i\right| \geq t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\mathrm{c}t^2}{K^2\|a\|_2^2}\right)$$

如果换成$\exp(-ct)$？

注意到当t较大，$\exp(-ct^2) < \exp(-ct)$,

所以它是一个比原来更广泛的一个指数界！

- 次指数分布(sub-Exponential distribution)
  - **次指数模**

$$\|X\|_{\psi_1} = \inf\{t > 0: \mathbb{E}\exp(|X|/t) \le 2\}$$

  - **次指数分布性质**

1. 概率角度 $\mathbb{P}(|X| \ge t) \le 2\exp(-ct/\|X\|_{\psi_1})$
2. 模长角度 $\|X\|_{L^p} = (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} \le c\|X\|_{\psi_1} p$ for $p \ge 1$
3. 矩母函数 $\mathbb{E}\exp(|X|/\|X\|_{\psi_1}) \le 2$
4. 矩母函数 $\mathbb{E}\exp(\lambda X) \le \exp(c^2\lambda^2)$ for $|\lambda| \le 1/c$ when $EX = 0$

- 次指数分布(sub-Exponential distribution)
  - **次指数模**

$$\|X\|_{\psi_1} = \inf\{t > 0: \mathbb{E}\exp(|X|/t) \le 2\}$$

  - **次指数分布性质**

1. 概率角度 $\mathbb{P}(|X| \ge t) \le 2\exp(-ct/\|X\|_{\psi_1})$
2. 模长角度 $\|X\|_{L^p} = (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} \le c\|X\|_{\psi_1} p$ for $p \ge 1$
3. 矩母函数 $\mathbb{E}\exp(|X|/\|X\|_{\psi_1}) \le 2$
4. 矩母函数 $\mathbb{E}\exp(\lambda X) \le \exp(c^2\lambda^2)$ for $|\lambda| \le 1/c$ when $EX = 0$

- 次指数分布与次高斯分布

  - 次高斯随机变量都是次指数随机变量
  - 次高斯的平方是次指数随机变量

$$\|X^2\|_{\psi_1} = \|X\|_{\psi_2}^2$$

  - 次高斯的乘机是次指数

$$\|XY\|_{\psi_1} \le \|X\|_{\psi_2}\|Y\|_{\psi_2}$$

- **补充一点知识**

一些关于次高斯、次指数模的性质

$$\left\|\sum_{i=1}^{N} X_i\right\|_{\psi_2}^2 \le C\sum_{i=1}^{N}\|X_i\|_{\psi_2}^2 \qquad \sigma^2\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \sum_{i=1}^{N}\sigma^2(X_i)$$

$$\|X-\mathbb{E}X\|_{\psi_2} \le C\|X\|_{\psi_2} \qquad \|X-\mathbb{E}X\|_{L_2} \le C\|X\|_{L_2}$$

$$\|X-\mathbb{E}X\|_{\psi_1} \le C\|X\|_{\psi_1}$$

- 伯恩斯坦不等式

Theorem 2.8.1 (Bernstein's inequality). *Let $X_1, \dots, X_N$ be independent, mean zero, sub-exponential random variables. Then, for every $t \geq 0$, we have*

$$\mathbb{P}\Big\{\Big|\sum_{i=1}^N X_i\Big| \geq t\Big\} \leq 2\exp\Big[-c\min\Big(\frac{t^2}{\sum_{i=1}^N \|X_i\|_{\psi_1}^2}, \frac{t}{\max_i \|X_i\|_{\psi_1}}\Big)\Big],$$

where $c > 0$ is an absolute constant.

Theorem 2.8.2 (Bernstein's inequality). *Let $X_1, \dots, X_N$ be independent, mean zero, sub-exponential random variables, and $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$. Then, for every $t \geq 0$, we have*

$$\mathbb{P}\Big\{\Big|\sum_{i=1}^N a_i X_i\Big| \geq t\Big\} \leq 2\exp\Big[-c\min\Big(\frac{t^2}{K^2\|a\|_2^2}, \frac{t}{K\|a\|_\infty}\Big)\Big]$$

where $K = \max_i \|X_i\|_{\psi_1}$.

- 对于有界随机变量

Theorem 2.8.4 (Bernstein's inequality for bounded distributions). *Let $X_1, \dots, X_N$ be independent, mean zero random variables, such that $|X_i| \le K$ all i. Then, for every $t \ge 0$, we have*

$$\mathbb{P}\Big\{\Big|\sum_{i=1}^{N} X_i\Big| \ge t\Big\} \le 2\exp\Big(-\frac{t^2/2}{\sigma^2 + Kt/3}\Big).$$

Here $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E} X_i^2$ is the variance of the sum.

谢谢！

@滕佳烨