高维概率

High-Dimensional Probability

五、高维随机向量导引

@滕佳烨

- **之前学了什么**

霍弗丁不等式？伯恩斯坦不等式？
次高斯分布？次指数分布？
非渐进？指数收敛？

这些都是对一维随机变量的。
那高维随机变量（向量）又有什么特殊的性质呢？

- **这章要学什么**

1. 对高维空间的刻画，以及对高维向量的简单介绍（isotropy）
2. **次高斯随机向量**，以及一些例子
3. 随机向量的Concentration
4. 一些应用(神奇的Grothendieck不等式，以及连带的半正定规划问题、最大切问题)

- 故事要从高维空间开始讲起

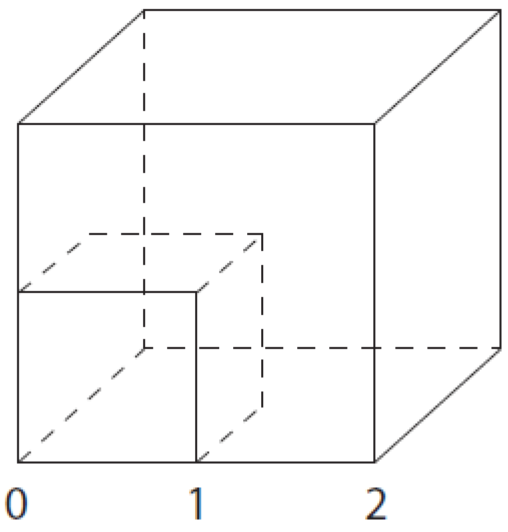

Figure 3.1 The abundance of room in high dimensions: the larger cube has volume exponentially larger than the smaller cube.

维度灾难curse of dimensionality

- 那么高维向量特殊在哪呢？

高维向量几乎正交

Isotropic and Independent

- 什么是Isotropy

Definition 3.2.1 (Isotropic random vectors). A random vector X in $\mathbb{R}^n$ is called *isotropic* if

$$\Sigma(X) = \mathbb{E}\, X X^\mathsf{T} = I_n$$

where I_n denotes the identity matrix in $\mathbb{R}^n$.

Isotropy的地位类似于代数中的“1”
其实在几何中就是一个**不带有伸缩性质的旋转**嘛！

Lemma 3.2.3 (Characterization of isotropy). *A random vector X in $\mathbb{R}^n$ is isotropic if and only if*

$$\mathbb{E}\,\langle X, x\rangle^2 = \|x\|_2^2 \quad \textit{for all } x \in \mathbb{R}^n.$$

- Isotropy随机变量的性质：几乎正交

Remark 3.2.5 (Almost orthogonality of independent vectors). Let us normalize the random vectors X and Y in Lemma 3.2.4, setting

$$\overline{X} := \frac{X}{\|X\|_2} \quad \text{and} \quad \overline{Y} := \frac{Y}{\|Y\|_2}.$$

Lemma 3.2.4 is basically telling us that[2] $\|X\|_2 \sim \sqrt{n}$, $\|Y\|_2 \sim \sqrt{n}$ and $\langle X, Y\rangle \sim \sqrt{n}$ with high probability, which implies that

$$|\langle \overline{X}, \overline{Y}\rangle| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

- Isotropy随机变量的性质：几乎正交

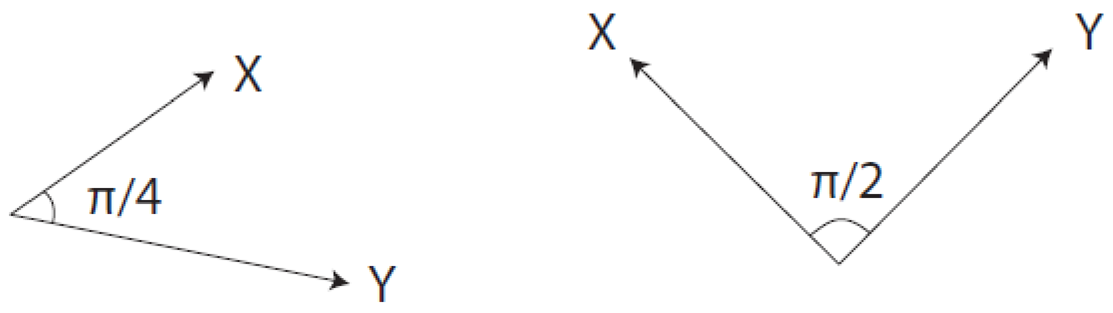

Figure 3.4 Independent isotropic random vectors tend to be almost orthogonal in high dimensions but not in low dimensions. On the plane, the average angle is $\pi/4$, while in high dimensions it is close to $\pi/2$.

总结：

1. 高维空间比起低维有一些非平凡性质：维度灾难
2. Isotropy的定义：非伸缩旋转
3. Isotropy的性质：几乎正交
4. Isotropy的好处：引入随机性

谢谢！

@滕佳烨